3.3 Fuerzas de presión sobre superficies

Como ya discutimos en esta sección, la presión de un fluido es un escalar y la superficie sobre la cual ella actúa es la que, en definitiva, determina la característica vectorial de la fuerza de presión. Consideremos el caso genérico de un elemento de superficie, el que queda expresado vectorialmente en función de las componentes de su normal:

$$d\vec{S} = dS_x\ \hat{\imath} + dS_y\ \hat{\jmath} + dS_z\ \hat{k} \tag{3.46}$$

donde $dS_x = dS\ (\hat{n} \cdot \hat{\imath})$, $dS_y = dS\ (\hat{n} \cdot \hat{\jmath})$, $dS_z = dS\ (\hat{n} \cdot \hat{k})$.

Por definición, la fuerza de presión actúa perpendicular a la superficie (o bien paralela a su vector normal) y además es una fuerza de compresión; por lo tanto, un elemento de fuerza de presión queda definido como:

$$d\vec{F} = -p\, d\vec{S} \tag{3.47}$$

donde el signo negativo de este elemento de fuerza se debe a que ésta es una fuerza de compresión. La fuerza total de presión queda determinada al integrar sobre todos los elementos de fuerza tal que:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = -\int_{S_x} p\, dS_x\, \hat{\imath} - \int_{S_y} p\, dS_y\, \hat{\jmath} - \int_{S_z} p\, dS_z\, \hat{k} \tag{3.48}$$

Considerando esta definición básica, en los siguientes puntos analizaremos algunos casos particulares.

3.3.1 Superficies planas horizontales

Para comenzar, consideremos una superficie plana horizontal como la que se esquematiza en la **Figura 3.7**. Tomemos a continuación un elemento de superficie $d\vec{S} = 0\, \hat{\imath} + 0\, \hat{\jmath} + dS_z\, \hat{k}$. La fuerza de presión $d\vec{F}$ que actúa sobre dicho elemento es:

$$d\vec{F} = -p\, d\vec{S} = 0\, \hat{\imath} + 0\, \hat{\jmath} - p\, dS_z\, \hat{k} \tag{3.49}$$

Si además consideramos presiones relativas (es decir, que trabajamos con presiones relativas a la atmosférica, tal que $p = 0$ en la superficie libre) y que la presión sobre el elemento $d\vec{S}$ está dada por la ley hidrostática de presiones, entonces se tiene:

$$p = \rho g h = \gamma H \tag{3.50}$$

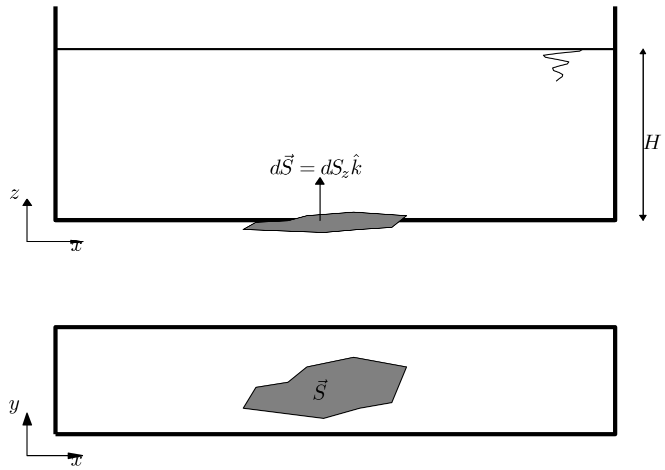


Figura 3.7: Esquema para analizar fuerzas sobre superficies planas horizontales.

donde H es la altura de la columna de fluido sobre la superficie S_z, entonces la fuerza de presión $\vec{F}$ actuando sobre esta superficie tiene componentes:

$$F_x = F_y = 0 \ ; \ F_z = -\int_{S_z} \rho g H dS_z = -\gamma H S_z \tag{3.51}$$

De esta forma, vemos de (3.51) que la fuerza de presión que el líquido ejerce sobre la superficie corresponde, básicamente, al peso del líquido sobre ella. Esto es hasta cierto punto obvio, ya que la ley hidrostática de presiones no es otra cosa que la resultante del balance entre la presión y el peso del fluido. A continuación, es interesante conocer también el punto de aplicación o *baricentro*, $\vec{x}_r$, donde actúa esta fuerza, el que se obtiene de calcular el torque, $\vec{T}$, que ejerce esta fuerza de presión respecto del origen del sistema de coordenadas. Es necesario considerar que el torque ejercido por la resultante de la fuerza, actuando en su punto de aplicación, es igual a la suma de los elementos de torque que ejercen los elementos de fuerza de presión distribuidos sobre el área. Para esto necesitamos evaluar:

$$\vec{T} = \vec{x}_r \times \vec{F} = \int \vec{x} \times p\, d\vec{S} \tag{3.52}$$

de donde obtenemos:

$$T_y = -x_r F_z = \int_{S_z} x\, \gamma H\, dS_z \tag{3.53}$$

de donde se deduce que

$$x_r = \frac{1}{S_z} \int_{S_z} x\, dS_z \tag{3.54}$$

y

$$y_r = \frac{1}{S_z} \int_{S_z} y \, dS_z \tag{3.55}$$

de manera que el punto de aplicación de la fuerza es igual al centro de gravedad de la superficie, vale decir, $\vec{x}_r = \vec{x}_g$.

3.3.2 Superficies planas inclinadas

Consideremos ahora el caso genérico de una superficie plana inclinada en un ángulo θ con respecto de la superficie libre del líquido (ver **Figura 3.8**), donde ocuparemos un sistema de coordenadas (x', y', z'), rotado en un ángulo θ respecto del sistema de coordenadas en que z es vertical contrario a la gravedad (ver **Figura 3.8**). Para este caso, sabemos que sobre cualquier elemento de superficie $d\vec{S} = 0\,\hat{\imath}' + 0\,\hat{\jmath}' + dS_{z'}\,\hat{k}'$ actúa una presión que expresaremos a partir de la ley hidrostática como:

$$p = \gamma \; h \tag{3.56}$$

donde h es la profundidad local de la columna de agua. Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre el elemento de superficie es:

$$dF_{x'} = dF_{y'} = 0 \;\;,\;\; dF_{z'} = -p\, dS_{z'} = -\gamma\, h\, dS_{z'} \tag{3.57}$$

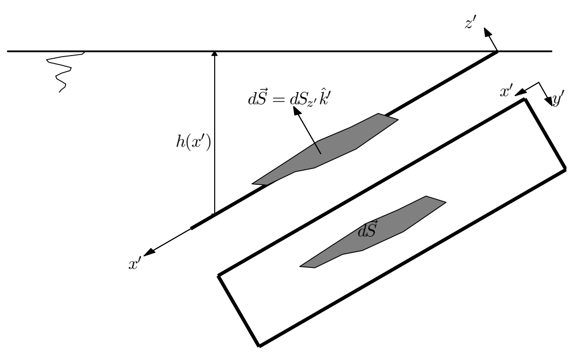


Figura 3.8: Esquema para analizar fuerzas sobre superficies planas inclinadas.

dado que

$$h = x' \, \sin\theta \tag{3.58}$$

entonces, la fuerza neta que actúa en la dirección z' es:

$$F_{z'} = -\gamma \; \sin\theta \int_{S_{z'}} x' \, dS_{z'} \tag{3.59}$$

donde la integral $\int_{S_{z'}} x'\, dS_{z'}$ la podemos relacionar con la posición según x' del centro de gravedad de la superficie, el que por definición es:

$$x'_g\, S_{z'} = \int_{S_{z'}} x'\, dS_{z'} \tag{3.60}$$

por lo tanto,

$$F_{z'} = -\gamma\ \sin\theta\ x'_g\ S_{z'} \tag{3.61}$$

Pero, $x'_g\ \sin\theta$ es la distancia desde la superficie libre al centro de gravedad de la superficie para la que calculamos la fuerza de presión ($h_g = x'_g\ \sin\theta$). Luego, la fuerza que estamos calculando queda dada por:

$$F_{z'} = -\gamma\ h_g\ S_{z'} \tag{3.62}$$

donde $\gamma\ h_g$ es la presión en el centro de gravedad de la superficie:

$$p_g = \gamma\ h_g \tag{3.63}$$

de donde resulta:

$$F_{z'} = -p_g\, S_{z'} \tag{3.64}$$

O sea, la resultante de las fuerzas de presión que actúa sobre la superficie se puede calcular simplemente como el producto entre su área y la presión en su centro de gravedad. Para determinar el punto de aplicación de esta fuerza o baricentro, $\vec{x}_r$, se calcula el torque de la fuerza de presión como:

$$\vec{x}'_r \times \vec{F} = \int_{S_{z'}} y'\,(-\,p\, dS_{z'})\ \hat{\imath}' - \int_{S_{z'}} x'\,(-\,p\, dS_{z'})\ \hat{\jmath}' + 0\,\hat{k}' = -y'_r\, p_g\, S_{z'}\, \hat{\imath}' + x'_r\, p_g\, S_{z'}\, \hat{\jmath}' \tag{3.65}$$

Usando (3.63) se obtiene la coordenada y' del baricentro como:

$$y'_r = \frac{1}{x'_g S_{z'}} \int_{S_{z'}} y'\, x'\ dS_{z'} \tag{3.66}$$

donde $\int_{S_{z'}} x'y'\, dS_{z'}$ es el producto de inercia de la superficie $S_{z'}$ respecto de los ejes x' e y' ($I_{x'y'}$). De igual forma se obtiene la coordenada x' del baricentro, tal que:

$$x'_r = \frac{1}{x'_g S_{z'}} \int_{S_{z'}} x'x'\, dS_{z'} = \frac{1}{x'_g S_{z'}} \int_{S_{z'}} x'^2\, dS_{z'} \tag{3.67}$$

donde $\int_{S_{z'}} x'^2\, dS_{z'}$ es el momento de inercia de la superficie $S_{z'}$ con respecto del eje y' ($I_{y'y'}$). Tanto $I_{y'y'}$ como $I_{x'y'}$ pueden relacionarse con el momento de inercia y producto de inercia con respecto del eje que cruza el centro de gravedad de la superficie ($I_{y'_g y'_g}$), a través de la relación de Steiner:

$$I_{y'y'} = I_{y'_g y'_g} + x_g'^2\, S_{z'} \tag{3.68}$$

y

$$I_{x'y'} = I_{x'_g y'_g} + y'_g x'_g \, S_{z'} \tag{3.69}$$

Por lo tanto,

$$x'_r = \frac{I_{y'_g y'_g}}{x'_g \, S_{z'}} + x'_g \tag{3.70}$$

$$y'_r = \frac{I_{x'_g y'_g}}{x'_g \, S_{z'}} + y'_g \tag{3.71}$$

Dado que $I_{y'_g y'_g} > 0$, vemos que el baricentro se encuentra siempre a mayor profundidad que el centro de gravedad de la superficie. Esto resulta debido a que la presión aumenta con la profundidad según la ley hidrostática.

3.3.3 Concepto del prisma de presiones

Consideremos un caso simplificado del resultado anterior, el de una superficie vertical rectangular. Para esta superficie ya encontramos que si la presión varía según:

$$p = \gamma \, (H - z) \tag{3.72}$$

donde $(H - z)$ es la profundidad local de la columna de agua con H la altura de la columna de agua respecto del origen del sistema de coordenadas, entonces la fuerza resultante es:

$$F_x = \gamma \int (H - z) B \, dz \tag{3.73}$$

donde B es el ancho del la superficie rectangular, y, por lo tanto, la integral en (3.73) geométricamente representa el volumen del denominado *prisma de presiones* que gráficamente se muestra en la **Figura 3.9**. De esta forma, en superficies rectangulares, la resultante de la fuerza de presión puede calcularse como el volumen del prisma de presiones de base $\gamma \, H$, alto H y profundidad B. La mayor utilidad de este resultado es que es igualmente válido para superficies rectangulares inclinadas, o para casos estratificados, como se muestra en la **Figura 3.10**, donde la fuerza de presión que actúa en la capa superficial está dada por el prisma triangular de base $\gamma_1 \, h_1$ (prisma (I)), mientras que la fuerza de presiones que actúa en la capa profunda queda determinada a partir del prisma rectangular de base $\gamma_1 \, h_1$ y alto h_2 (prisma (II)), y el prisma triangular de base $\gamma_2 \, h_2$ y alto h_2 (prisma (III)).

Es fácil ver que el punto de aplicación de la fuerza de presión se encuentra en el centro de gravedad del prisma de presiones, ubicado a $1/3$ por sobre la base en el caso de prismas triangulares. Por último, vale la pena recordar que el cálculo de los momentos de inercia viene del cálculo del torque, el cual puede convenientemente ser descompuesto en volúmenes. Por ejemplo, veamos el volumen de la **Figura 3.10**, el cual descompusimos en 3 volúmenes,

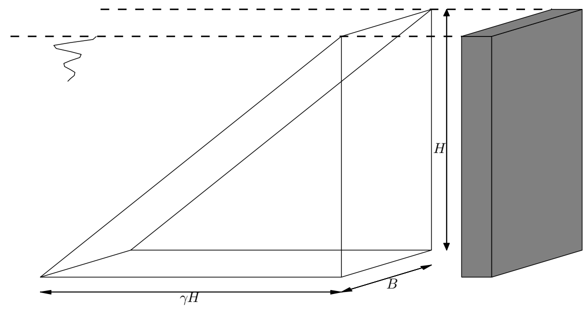


Figura 3.9: Prisma de presiones para un fluido de densidad homogénea.

tal que el torque asociado al prima I se aplica a una profundidad $2/3\,h_1$, el torque asociado al prisma rectangular II se aplica a una altura $h_2/2$ sobre la base, y la fuerza de presión asociada al prisma triangular III es ejercida a una altura $h_2/3$ sobre la base de la figura.

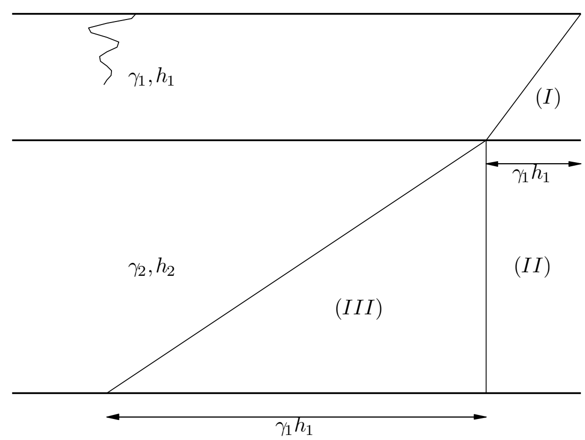


Figura 3.10: Prisma de presiones para un fluido estratificado en dos capas de peso específico γ_1 y γ_2, y espesores h_1 y h_2, respectivamente.

3.3.4 Fuerzas de presión sobre superficies curvas

Consideremos el caso más complejo, en que la superficie sobre la cual se aplica la fuerza de presión está dada por $d\vec{S} = dS_x\,\hat{\imath} + dS_y\,\hat{\jmath} + dS_z\,\hat{k}$, en donde el eje z apunta vertical contrario a la aceleración de gravedad. Por lo tanto, un elemento de fuerza de presión que actúa sobre

este elemento de superficie viene dado por:

$$d\vec{F} = -p\, d\vec{S} = -p\, dS_x\, \hat{\imath} - p\, dS_y\, \hat{\jmath} - p\, dS_z\, \hat{k} \tag{3.74}$$

Al integrar sobre toda la superficie, la que en el caso más general es curva, se obtiene que la fuerza de presión está dada por:

$$F_x = -\int_{S_x} p\, dS_x \tag{3.75}$$

$$F_y = -\int_{S_y} p\, dS_y \tag{3.76}$$

$$F_z = -\int_{S_z} p\, dS_z \tag{3.77}$$

donde S_x, S_y y S_z son las proyecciones de la superficie sobre los planos $y-z$, $x-z$ y $x-y$, respectivamente. En otras palabras, S_x puede interpretarse como la sombra que proyectaría la superficie $\vec{S}$ en el plano $y-z$, si la ilumin-áramos en la dirección del eje x (independiente del sentido en el que se ilumine la sombra es idéntica). Análogamente, S_y y S_z corresponden a las sombras de la superficie considerada en los planos $x-z$ y $x-y$, respectivamente. Se debe considerar que los elementos de superficie en (3.75) a (3.77) son normales a la superficie y, por lo tanto, se debe analizar cuidadosamente su signo, o bien, los límites de integración.

Dado el sistema de coordenadas elegido, las componentes F_x y F_y corresponden a fuerzas horizontales sobre superficies planas verticales y ya sabemos como calcular su resultante y punto de aplicación. En efecto, F_x es la fuerza de presión actuando sobre una superficie plana vertical, correspondiente a la proyección de la superficie sobre el plano $y-z$ (calculada como $F_x = p_{gx}\, S_x$, donde p_{gx} es la presión en el centro de gravedad de la superficie S_x); mientras que F_y es la fuerza de presión actuando sobre la superficie proyectada sobre el plano $x-z$ (calculada como $F_y = p_{gy}\, S_y$, donde p_{gy} es la presión en el centro de gravedad de la superficie S_y).

La determinación de la componente F_z es menos directa. Dado que la presión sobre la superficie considerada está dada por:

$$p = \gamma\, h \tag{3.78}$$

donde h es la profundidad local de cada punto de dicha superficie, entonces:

$$dF_z = -\gamma\, h\, dS_z \tag{3.79}$$

pero $h\, dS_z$ corresponde al elemento del volumen comprendido entre la superficie libre o isóbara de presión atmosférica y el elemento de superficie $d\vec{S}$ (dV **Figura 3.11**), por lo tanto:

$$dF_z = -\gamma\, dV \tag{3.80}$$

de modo que la componente vertical de la fuerza de presión es:

$$F_z = -\gamma\, V \tag{3.81}$$

donde V denota el volumen comprendido entre la isóbara de presión atmosférica y la superficie considerada.

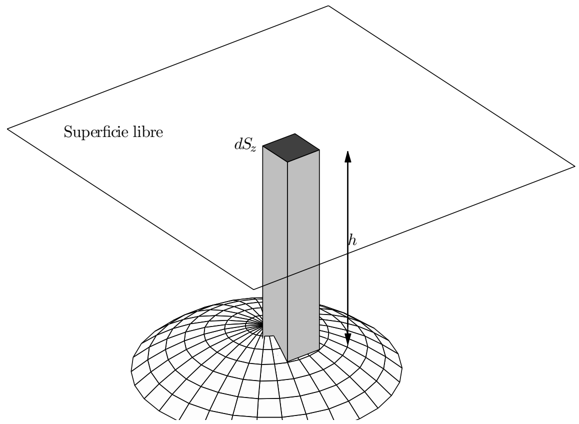


Figura 3.11: Cálculo de la componente vertical de la fuerza de presión.

O sea, la componente vertical corresponde al peso de la columna líquida equivalente comprendida entre la isóbara de presión atmosférica y la superficie S. Es importante notar que el volumen equivalente de líquido V no necesariamente es igual al volumen real de líquido, como se muestra en la **Figura 3.12**.

Determinemos ahora el punto de aplicación de la fuerza. Para las componentes horizontales, F_x y F_y, éste se calcula de la forma ya vista para el caso de superficies planas. Ello es distinto para el caso de la componente vertical. Calculemos el punto de aplicación de F_z a partir de:

$$y_r\, \gamma\, V = \gamma \int_{S_z} y\, dV \tag{3.82}$$

por lo tanto:

$$y_r = \frac{1}{V} \int_{S_z} y dV \tag{3.83}$$

y, análogamente:

$$x_r = \frac{1}{V} \int_{S_z} x dV \tag{3.84}$$

Es decir, el punto de aplicación de la fuerza vertical corresponde al centro de gravedad del volumen comprendido entre la superficie considerada y la isóbara de presión atmosférica.

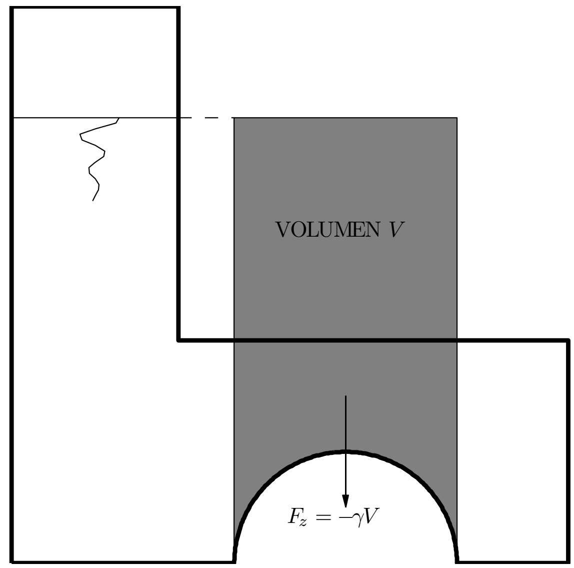


Figura 3.12: Ejemplo de cómo el volumen para el cálculo de la componente vertical de la fuerza de presión no necesariamente corresponde al volumen real del líquido sobre la superficie considerada.

Como ya se ha señalado, este volumen no necesariamente corresponde a un volumen real de líquido.

3.3.5 Fuerza boyante generalizada

Hace más de 2000 años el gran sabio griego Arquímides estableció cuál era la resultante de la fuerza de presión actuando sobre un cuerpo sumergido. El resultado se conoce como *principio de Arquímides* e indica que "todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta la acción de una fuerza vertical ascendente igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo".

Sabiendo calcular fuerzas de presión sobre superficies curvas es muy fácil demostrar el principio de Arquímides. Sin embargo, haremos a continuación una demostración más general, válida para cualquier cuerpo sumergido en un fluido sometido a un campo de fuerzas másicas.

Consideremos el cuerpo sumergido de la **Figura 3.13**. El resultado de la fuerza de presión actuando sobre su superficie es:

$$\vec{F} = -\int_S p\, d\vec{S} \tag{3.85}$$

Apliquemos el teorema de Gauss sabiendo que $d\vec{S} = \hat{n}\, dS$, donde $\hat{n}$ es el vector unitario normal al elemento de superficie dS. Entonces:

$$\int_S p\, \hat{n}\, dS = \int_V \nabla p\, dV \tag{3.86}$$

donde V representa el volumen encerrado por S. Por otro lado, la ecuación de equilibrio estático relaciona ∇p con las fuerzas másicas:

$$\nabla p = \rho \vec{f}_m \tag{3.87}$$

luego se obtiene

$$\vec{F} = -\int_V \rho\, \vec{f}_m\, dV \tag{3.88}$$

La (3.88) puede ser llamada *principio de Arquímides generalizado*. Si el campo de fuerzas corresponde al gravitacional, entonces $\vec{f}_m = -g\, \hat{k}$ y (3.88) se reduce a:

$$F_z = \int_V \rho\, g\, dV \tag{3.89}$$

La ec. (3.89) indica que la fuerza de presión actuando sobre un cuerpo sumergido es igual al peso de un volumen de fluido igual al volumen sumergido y actúa en la dirección vertical hacia arriba. $\vec{F}$ se denomina *empuje*. Es importante notar que el empuje es simplemente la resultante de las fuerzas de presión actuando sobre el cuerpo sumergido y no es una fuerza adicional a ellas.

En términos del cálculo de fuerzas de presión a partir de los volúmenes equivalentes de fluido que analizamos en el punto anterior, es fácil ver que el principio de Arquímides resulta de componer el peso del volumen V_1, que actúa sobre la superficie con componentes de la normal *hacia arriba* ($S_z > 0$, ver **Figura 3.12**), y el volumen V_2, que actúa sobre la superficie con componentes de la normal *hacia abajo* ($S_z < 0$ ver **Figura 3.13**). De igual forma se obtiene que el punto de aplicación es en el centro de gravedad del volumen sumergido.

Finalmente, es fácil deducir la condición de flotabilidad de cuerpos sólidos, de volumen V y densidad ρ_s, en un fluido de densidad ρ. En efecto, el peso del cuerpo sólido es $W = \rho_s\, g\, V$, en tanto que el empuje que ejerce el fluido es: $E = \rho\, g\, V$. Así, el peso sumergido del cuerpo resulta ser: $W_s = W - E = (\rho_s - \rho)\, g\, V$, el cual es positivo si $\rho_s > \rho$, situación en la que el cuerpo se hunde, y negativo si $\rho_s < \rho$, situación en la que el cuerpo flota. En este último caso, cuando el fluido es un líquido, el cuerpo alcanza una posición de equilibrio en la superficie libre tal que el volumen sumergido del cuerpo, V_s, se obtiene de modo tal que el empuje $E = \rho\, g\, V_s$ iguala al peso del cuerpo W. En este caso la proporción de volumen sumergido del cuerpo resulta ser:

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho_s}{\rho} \tag{3.90}$$

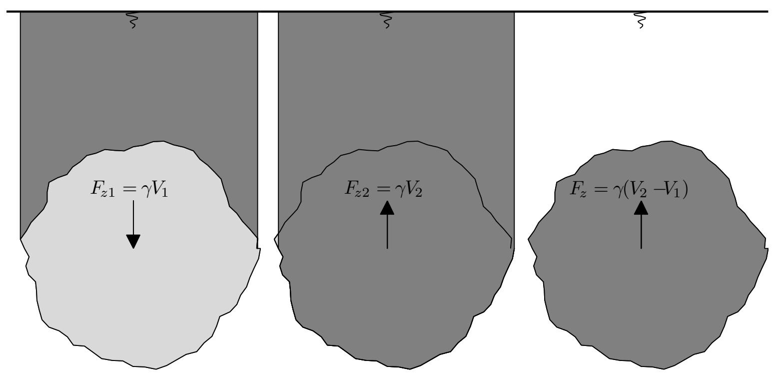


Figura 3.13: Demostración del principio de Arquímides usando resultados obtenidos para análisis de fuerzas sobre superficies curvas.

Capítulo 4

Cinemática de fluidos

La cinemática de fluidos se refiere a la descripción del movimiento de los fluidos, sin considerar o analizar las fuerzas que producen dicho movimiento (fuerzas que estudiaremos en el siguiente capítulo de dinámica de fluidos). El principio básico sobre el cual se sustenta todo el análisis es en la hipótesis de medio continuo, la cual implica que las propiedades del flujo (velocidad, presión, etc.) son funciones continuas en el espacio y en el tiempo. Esto lleva implícito una escala espacial de tipo macroscópico, ya que en principio a nivel molecular el fluido no es en rigor un medio continuo. Dado que la escala para la cual nos interesa analizar el movimiento del fluido es, en efecto, macroscópica entonces supondremos que cualquier desplazamiento que consideremos, incluso a nivel diferencial, será mucho mayor que la escala molecular. En estos términos, entonces, es válido suponer el fluido como un medio continuo

4.1 Clasificación de tipos de escurrimiento

Para poder clasificar el flujo o escurrimiento de un fluido es necesario definir primero cuál es el indicador que se utilizará para tal efecto, entendiendo como indicador, por ejemplo, el grado de ordenamiento del flujo o la deformación angular de los volúmenes de control. Es así que, en principio, podemos definir un gran número de posibles clasificaciones del escurrimiento, pero para efectos del curso nos vamos a enfocar en las siguientes:

- Flujo laminar o turbulento.

  Osborne Reynods en 1883 se encontraba estudiando experimentalmente las fuerzas que se oponen al movimiento de un fluido en una tubería, lo que le llevó a demostrar la existencia de dos tipos de escurrimientos, que denominó flujo laminar y flujo turbulento. Para esto, él realizó diseñó el montaje experimental que se muestra en la **Figura 4.1**,

con las siguientes observaciones: (ver **Figura 4.2**)[1]: "The colour was allowed to flow very slowly, and the cock slightly opened. The colour band established itself much as before[2], and remained beautifully steady as the velocity was increased until, all at once, on a slight further opening of the valve, at a point about two feet from the iron pipe, the colour band appeared to expland and mix with the water so as to fill the remainer of the band with a coloured cloud, of what appeared at first sight to be a uniform tint. Closer inspection, however, showed the nature of this cloud. By moving the eye so as to follow the motion of the water, the expansion of the colour band resolved itself into a well-defined waving motion of the band, at first without other disturbance, but after two or three waves came a succession of well-defined and distinct eddies."

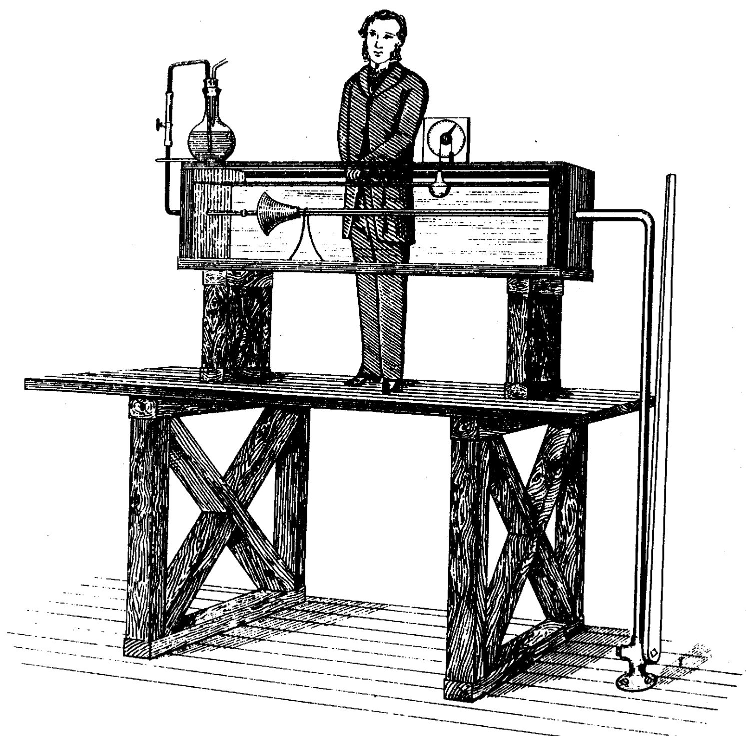


Fig. 9.1. Sketch of Reynolds's dye experiment, taken from his 1883 paper

Figura 4.1: Experimento de Reynolds.

Más allá de una buena descripción de sus resultados experimentales, Reynolds mostró que para definir si un flujo es laminar o turbulento es necesario analizar el parámetro

[1]Reynolds, O. 1883. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels. *Philos. Trans.* **174**: 935 - 982.

[2]probó con un experimento que no funcionó bien

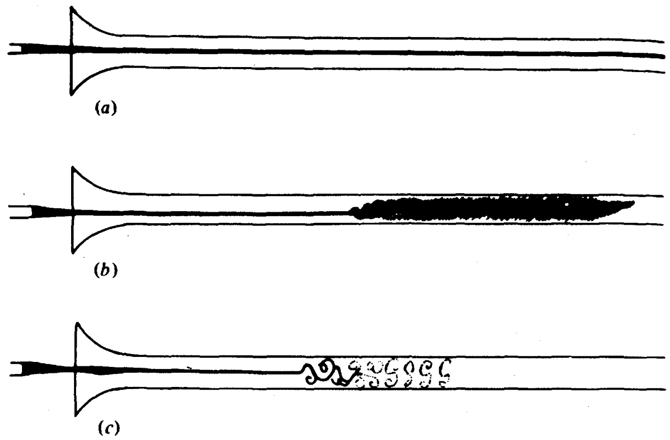


Fig. 9.2. Reynolds's drawings of the flow in his dye experiment.

Figura 4.2: Observaciones de Reynolds respecto del movimiento del fluido en su experimento.

adimensional (número sin dimensiones que se obtiene combinando variables con dimensiones) que actualmente se conoce como *número de Reynolds*, Re, definido como:

$$Re = \frac{U\,D}{\nu} \tag{4.1}$$

donde U y D denotan una velocidad y una dimensión característica del flujo (e.g., velocidad promedio en la sección transversal y diámetro en el caso del flujo en tuberías). De esta forma, se ha determinado que si el número de Reynolds es menor que un cierto valor crítico, el flujo es laminar, mientras que si el valor de Re es grande, entonces el flujo es turbulento. Lo interesante de notar es que un comportamiento u otro depende del valor combinado de las variables escala de velocidad, dimensión del flujo y viscosidad del fluido, de modo que mientras más veloz o de mayor tamaño es el flujo, éste tiende a ser turbulento, en tanto mientras más viscoso es el fluido la tendencia es a que el flujo sea laminar.

La existencia de este límite entre el orden y el desorden se explica como un problema de estabilidad del flujo. Para números de Reynolds bajos, las perturbaciones que afectan al flujo pueden ser fácilmente atenuadas por la viscosidad del fluido, sin embargo, al aumentar el número de Reynolds del flujo, la viscosidad del fluido pierde la capacidad de atenuar las perturbaciones, lo que en definitiva se traduce en que éstas crecen indefinidamente hasta que el flujo se desordena completamente. Ahora, por qué se genera este comportamiento caótico y desordenado? Una explicación resulta de considerar que los flujos turbulentos son más energéticos (tienen mayor velocidad) y deben ser frenados por esfuerzos de corte viscosos; por lo tanto, dado que la viscosidad del fluido

es un dato fijo, una manera de frenar flujos energéticos es aumentando los gradientes de velocidad (ya que los esfuerzos de corte viscosos son proporcionales a éstos), cosa que ocurre cuando el flujo genera remolinos, vórtices y cambios caóticos en su velocidad.

En rigor, el paso de flujo laminar a turbulento no es abrupto sino que existe un rango de valores de Re tal que el flujo no es ni laminar ni completamente turbulento. Este régimen intermedio se conoce como flujo en transición laminar turbulento, y para tuberías es generalmente aceptado que si

- $Re < 2000$, el flujo es laminar.
- $2000 < Re < 4000$, el flujo es en transición.
- $Re > 4000$ el flujo es turbulento.

Por último, la turbulencia no solamente es una característica del flujo en tuberías, sino que el problema de inestabilidad ocurre en diferentes flujos. En particular, los flujos ambientales (ríos, viento, corrientes oceánicas, etc.) son generalmente turbulentos debido a las grandes dimensiones que poseen. La transición a la turbulencia, por otro lado, ha sido estudiada en diferentes condiciones de flujo, tales como la inestabilidad de Rayleigh-Benard, que ocurre al calentar por abajo un sistema de placas paralelas, la inestabilidad de Kelvin[3]-Helmholtz que ocurre en flujos estratificados, o la inestabilidad de Taylor-Couette que ocurre en el flujo entre cilindros concéntricos como los estudiados en la primera parte del curso (notar que las soluciones encontradas en ese caso son válidas solo para el caso de flujo laminar).

- Flujo permanente o impermanente.

  Flujo permanente se define como aquel para el que las condiciones del flujo en cualquier punto del espacio permanecen constantes en el tiempo. En caso que las condiciones del flujo varíen en el tiempo, el flujo se denomina impermanente o transitorio.

  Es importante mencionar que, tomando en cuenta la caracterización anterior, un flujo tubulento es por definición impermanente, ya que en cualquier punto fijo del espacio la velocidad y otras propiedades del flujo, como la presión por ejemplo, varían continuamente en tiempo. Sin embargo, si el flujo medio (propiedades promediadas durante un período largo de tiempo) no cambia en el tiempo, entonces es posible clasificar el flujo medio como permanente (en rigor, del punto de vista estadístico, sería estacionario en la media).

- Flujo uniforme o variado.

  Decimos que el flujo es uniforme si sus propiedades no cambian en el espacio, de lo contrario se denomina variado. Sin embargo, la denominación de uniforme o variado depende del comportamiento de ciertas propiedades en algunas direcciones del espacio. Por ejemplo, para el flujo entre placas planas paralelas que hemos revisado previamente

[3] Lord Kelvin, famoso científico cuyo nombre se utiliza para medir la temperatura absoluta

demostramos que existe un perfil lineal de velocidad longitudinal, y por lo tanto la velocidad es variada (no uniforme) si consideramos la dirección perpendicular a las placas, pero uniforme en la dirección longitudinal paralela a las placas, ya que ella claramente no varía en dicha dirección.

Como es de esperar, existen combinaciones entre las características temporales y espaciales del flujo, tal que un flujo puede ser permanente y uniforme o permanente y variado; impermanente y uniforme o impermanente y variado. Asimismo, todas estas combinaciones de flujo pueden además ser clasificadas como laminares o turbulentas.

- Existen otras clasificaciones del flujo como: flujo compresible o incompresible (dependiendo de si la densidad se mantiene constante o no), flujo supersónico o subsónico (si la velocidad del flujo es mayor o menor a la velocidad de propagación de las ondas de presión, es decir, la velocidad del sonido), flujo rotacional o irrotacional (clasificación relacionada con la vorticidad del flujo como estudiaremos al final de este capítulo), flujo homogéneo o estratificado (cuando la densidad es constante o varía en la dirección vertical), etc.

4.2 Métodos de Lagrange y Euler. Caracterización del movimiento de un fluido.

La descripción del movimiento de un fluido se refiere, en general, a caracterizar el flujo en cuanto a las trayectorias que siguen pequeñas porciones de fluido y su campo de velocidades y aceleraciones. Para ésto se utilizan dos métodos: el método de Lagrange y el método de Euler.

4.2.1 Método de Lagrange

Este método se basa en la descripción del movimiento de cada pequeña porción o *partícula* de fluido, para lo cual la variable relevante es la posición $\vec{r} = x_p\,\hat{i} + y_p\,\hat{j} + z_p\,\hat{k}$ de cada una en el tiempo. Si consideramos una porción de fluido que en $t = 0$ se encuentra en la posición $\vec{r} = \vec{r}_o$, entonces su trayectoria es: $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_o, t)$ (donde $\vec{r}_o$ identifica la porción de fluido que se está estudiando), y por lo tanto la velocidad, $\vec{v}$, está dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx_p}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy_p}{dt}\,\hat{j} + \frac{dz_p}{dt}\,\hat{k} \tag{4.2}$$

mientras que la aceleración, $\vec{a}$, resulta ser:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x_p}{dt^2}\,\hat{i} + \frac{d^2y_p}{dt^2}\,\hat{j} + \frac{d^2z_p}{dt^2}\,\hat{k} \tag{4.3}$$

Así, el campo de flujo según el método de Lagrange queda completamente descrito en la medida que se conozca la trayectoria de muchas partículas (en rigor infinitas) cuya posición inicial se conoce (obviamente, por continuidad, una partícula puede ocupar un único punto del espacio y viceversa).

4.2.2 Método de Euler

Este método asigna un campo de velocidades al espacio, independientemente de las partículas del fluido. Salvo casos aislados, este es el método más usado en mecánica de fluidos. De esta forma la variable relevante es la velocidad $\vec{v} = u\,\hat{i} + v\,\hat{j} + w\,\hat{k}$ la cual depende del espacio $\vec{x} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$ y el tiempo t. Es evidente que el campo de flujo es el mismo independiente del método escogido para describirlo, por lo que cuando se observa un punto del espacio según el método de Euler, la velocidad que debiera obtenerse en un instante de tiempo t debiera ser aquella de la partícula de fluido que, según el método de Lagrange, en ese instante está pasando por el punto del espacio observado. Teniendo en cuenta esta condición, es posible derivar una expresión para el campo de aceleración, $\vec{a}$, según el método de Euler. En efecto, aplicando la regla de la cadena:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{4.4}$$

Pero por el método de Lagrange, en el punto de observación las velocidades de las partículas corresponden a:

$$u = \frac{dx}{dt} \;\;,\;\; v = \frac{dy}{dt} \;\;,\;\; w = \frac{dz}{dt} \tag{4.5}$$

entonces,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \tag{4.6}$$

Aprovechando este resultado, es fácil demostrar que, en general, el cambio total temporal de cualquier propiedad del fluido $N(\vec{x}, t)$ queda dado por:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + u\,\frac{\partial N}{\partial x} + v\,\frac{\partial N}{\partial y} + w\,\frac{\partial N}{\partial z} \tag{4.7}$$

Usando este resultado, definimos el operador denominado *derivada material*:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\,\frac{\partial}{\partial x} + v\,\frac{\partial}{\partial y} + w\,\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla \tag{4.8}$$

donde ∇ es el operador gradiente. La aceleración según el método de Euler queda, por lo tanto, dada por:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v} \tag{4.9}$$

la que, al ser un vector, tiene componentes en las tres direcciones.

Analicemos cuál es el significado de los dos términos que componen la derivada material de (4.8). Primero, la derivada material nos dice cuál es el cambio total de la propiedad en el tiempo, el que depende tanto del cambio parcial (o, recurriendo a la definición previa, cambio impermanente) en el tiempo (primer término en (4.8)) como el que denominaremos cambio convectivo o advectivo ($\vec{v} \cdot \nabla$). El cambio parcial en el tiempo es más bien intuitivo de entender si, para un punto fijo en el espacio, vemos cómo cambia en el tiempo el valor de una propiedad del flujo (**Figura 4.3**). Por el contrario, es necesario hacer un análisis más detallado para entender el cambio convectivo o advectivo. Consideremos un flujo permanente en el angostamiento que se muestra en la **Figura 4.4**. Sabemos que, según el método de Lagrange, si tomamos una partícula en el punto 1 y seguimos su posición en el tiempo vamos a detectar que su velocidad aumenta de 1 a 2. Luego, si nos fijamos solo en el punto 1, vemos que la derivada parcial de la velocidad respecto del tiempo es cero, y por lo tanto es el término de la aceleración convectiva, $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$, el que nos indica que el flujo se encuentra acelerado, independientemente que sea permanente.

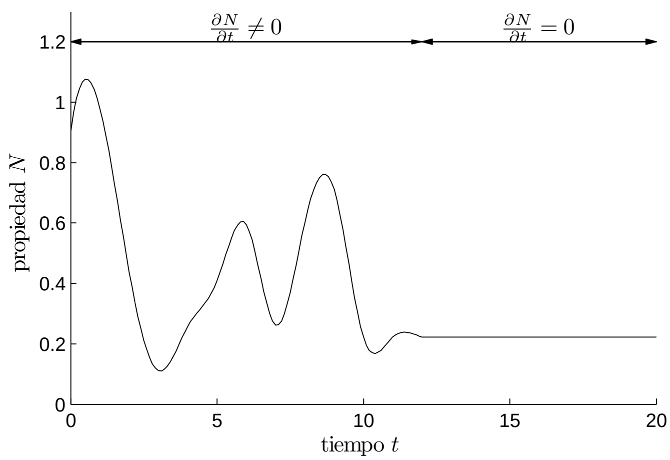


Figura 4.3: Cambio parcial de una propiedad N del flujo.

4.2.3 Líneas características del flujo

A continuación daremos una serie de definiciones útiles al momento de describir la cinemática de los fluidos.

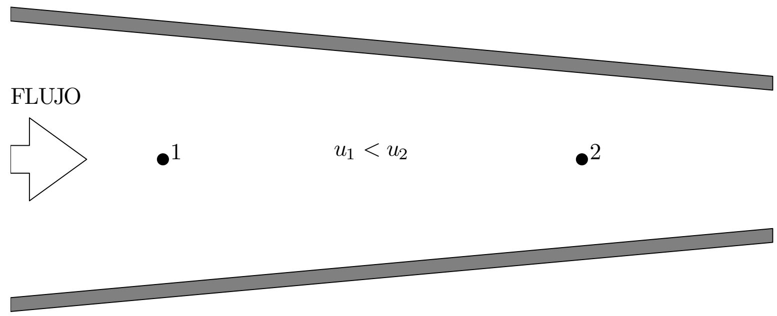


Figura 4.4: Flujo acelerado en un embudo.

Líneas de itinerario o trayectoria

Constituyen el lugar geométrico de las posiciones sucesivas que ocupa una misma porción o partícula de fluido en distintos instantes a medida que se mueve. La trayectoria de las partículas es por definición una descripción Lagrangeana del movimiento y exige, por lo tanto, la identificación inicial de las partículas.

Las líneas de trayectoria indican en cada punto la dirección instantánea del vector de velocidad de cada partícula. Las líneas de trayectorias pueden cruzarse, siempre y cuando un mismo punto del espacio sea ocupado por una partícula de fluido a la vez.

Líneas de corriente

Indican, para un instante dado, la dirección media de un número de partículas. De esta forma, las líneas de corriente son paralelas a la velocidad local del flujo, y cambian en el tiempo si el flujo es impermanente (**Figura 4.5**). Obviamente, las líneas de corriente no pueden cortarse ya que un mismo punto del espacio fluido no puede tener más que una velocidad.

Matemáticamente, las líneas de corriente se definen por:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0 \tag{4.10}$$

donde $d\vec{r}$ es un elemento de longitud medido a lo largo de las líneas de corriente. De esta forma, buscamos elementos de las líneas de corriente que sean paralelos a la velocidad local. La condición buscada es, por lo tanto:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = (w\,dy - v\,dz)\,\hat{i} - (w\,dx - u\,dz)\,\hat{j} + (v\,dx - u\,dy)\,\hat{k} = 0 \tag{4.11}$$

lo que corresponde a un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas por resolver.

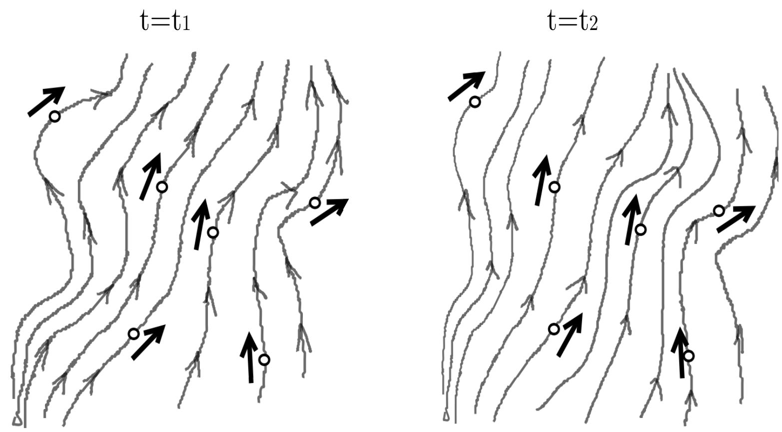


Figura 4.5: Líneas de corriente

Consideremos, por ejemplo, el flujo uniforme y permanente dado por: $u = u_o$, $v = v_o$ y $w = 0$, donde u_o y v_o son constantes. La ecuación de las líneas de corriente se deduce de la condición:

$$v_o\,dx = u_o\,dy \tag{4.12}$$

la que se puede integrar fácilmente para obtener:

$$x - x_o = \frac{u_o}{v_o}\,(y - y_o) \tag{4.13}$$

que indica que las líneas de corriente en este ejemplo corresponden a rectas en el plano $x - y$ cuya pendiente es u_o/v_o (**Figura 4.6**).

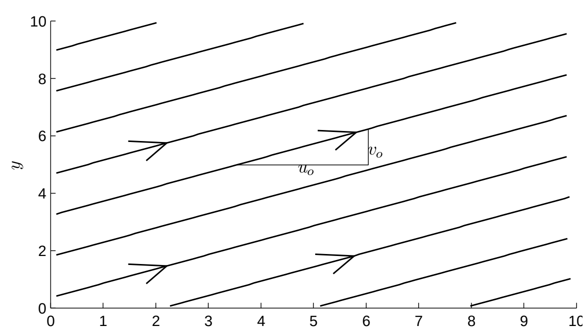


Figura 4.6: Líneas de corriente

Existen algunas diferencias entre líneas de corriente y líneas de trayectoria. Por un lado, las líneas de corriente son instantáneas, mientras que las trayectorias acumulan información

en el tiempo. Por otro lado, tal como lo hemos comentado, las líneas de corriente no pueden cruzarse, dado que eso significaría que para un punto dado del espacio existe más de una velocidad del flujo, pero esta restricción no es válida para las líneas de trayectoria. Además, cuando el flujo es permanente se cumple que las líneas de corriente y las líneas de trayectoria son iguales.

Por último, definiremos *tubo de flujo* o *tubo de coriente* a la superficie cerrada imaginaria que queda definida por las líneas de corriente que pasan por una curva cerrada en el espacio (**Figura 4.7**). La utilidad de esta definición radica en que sabemos no existen velocidades perpendiculares a la superficie del tubo de flujo, y por lo tanto podemos decir que el fluido dentro del volumen se encuentra aislado de su entorno, ya que no podrían haber intercambios de masa a través de dicha superficie.

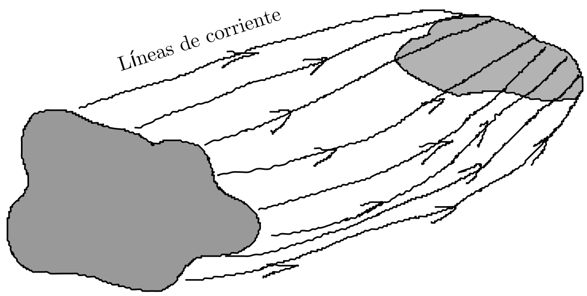


Figura 4.7: Definición de tubo de flujo

Líneas de humo

Se definen como el lugar geométrico que ocupan en un determinado instante de tiempo las partículas de fluido que pasaron por un un punto fijo del espacio en instantes de tiempo anteriores. Por ejemplo, Reynolds utilizó líneas de humo para describir los diferentes regímenes de escurrimiento. Así, para identificar una línea de humo es útil contar con algún trazador *pasivo*[4] que inyectamos en un punto. Las líneas que marca para cada instante de tiempo ese trazador corresponden a las líneas de humo, las que cambian de posición en el tiempo si el flujo es impermanente. Finalmente, en régimen permanente tanto líneas de corriente, de trayectoria y de humo coinciden.

[4]Definimos como trazador pasivo a todo compuesto que no genere movimiento del fluido debido a diferencias de densidad, dentro de los cuales no se cuenta el humo de los cigarros ya que usualmente está a mayor temperatura que el medio ambiente tal que su propia presencia induce el movimiento del fluido por efectos de boyancia.

4.3 Teorema del transporte de Reynolds

Para resolver cualquier problema de mecánica de fluidos, es necesario conocer los principios básicos que rigen la dinámica, las leyes constitutivas que permiten relacionar variables que describen el flujo (conocidas también como relaciones de cierre), y condiciones iniciales y de borde. Entendemos como principios básicos a las leyes universales que gobiernan la dinámica de los fluidos, dentro de las cuales se cuentan la conservación de masa (i.e., Ley de Lavoisier), momentum (i.e., Segunda Ley de Newton) y energía (i.e., Primera ley de la Termodinámica). Por el contrario, entendemos como leyes constitutivas, por ejemplo, la ley de Newton-Navier que liga los esfuerzos de corte con la tasa de deformación angular de los volúmenes de control, o la ecuación de estado del fluido.

Por otro lado, es posible definir al menos dos tipos de enfoques para abordar los problemas de mecánica de fluidos: enfoque integral y enfoque diferencial. El enfoque integral o global se centra en estudiar el transporte global de las propiedades del flujo en volúmenes de control macroscópicos, sin considerar en detalle qué ocurre en cada punto del dominio. Por el contrario, el enfoque diferencial se centra en describir y cuantificar cada una de las propiedades del fluido, en cada punto del espacio. Es posible saltar de un enfoque otro, al integrar el enfoque diferencial sobre volúmenes de control macroscópicos, o al tomar un volumen de control infinitesimalmente pequeño para el enfoque integral.

Utilicemos primero el enfoque integral que nos va a permitir a derivar el *teorema del transporte de Reynolds*, que es el punto de inicio para formular matemáticamente cualquiera de los principios básicos o leyes fundamentales que rigen la mecánica de fluidos. Primero es necesario hacer un par de definiciones:

- Volumen de control: Si bien hemos usado este concepto con anterioridad, definimos el volumen de control como un volumen de fluido, convenientemente identificado, fijo en el espacio (osea estamos usando el método de Euler), que conceptualmente aislaremos del medio circundante a través de la superficie S que delimita dicho volumen. A partir de esta definición vemos que el fluido puede atravesar la superficie S del volumen de control, produciendo así un recambio del fluido dentro del volumen de control.
- Sistema material: conjunto fijo de partículas o porciones de fluido tal que el volumen que ocupan en el espacio es función del tiempo, ya que puede ser advectado y/o deformado por el flujo. La característica principal de todo sistema material es que las partículas que lo conforman son siempre las mismas, aunque las propiedades de esas partículas puede variar en el tiempo.

Consideremos ahora un sistema material y un volumen de control V, tal que el sistema material coincide con el volumen de control en el tiempo inicial. Consideremos, además, una propiedad extensiva del flujo (vale decir, que depende de la cantidad de materia), N.

Veamos entonces la variación total, en el tiempo, de N dentro del volumen de control. Para esto, tomemos dos instantes de tiempo t y $t + \Delta t$, y definamos tres sistemas materiales (ver **Figura 4.9**):

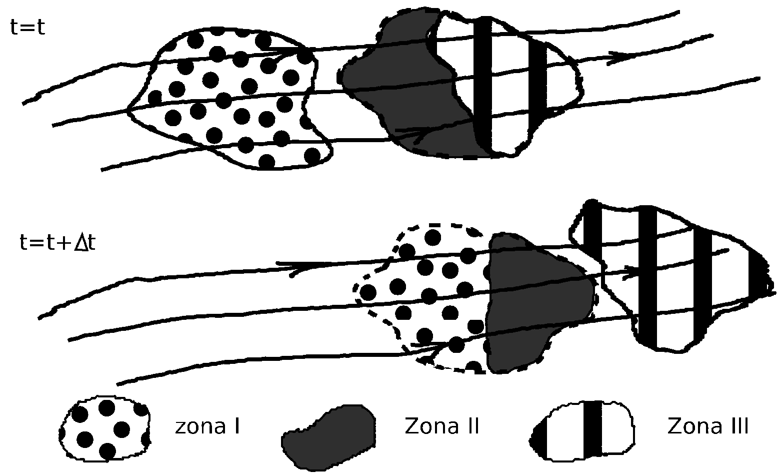


Figura 4.9: Definición de zonas para el teorema del transporte de Reynolds.

- Sistema I que contiene partículas que en t se encontraban fuera de V, pero que en $t + \Delta t$ se encuentran dentro de V.
- Sistema II que contiene partículas que tanto en t como en $t + \Delta t$ se encuentran dentro de V.
- Sistema III que contiene partículas que en t se encontraban dentro de V, pero que en $t + \Delta t$ se encuentran fuera de V.

Si llamamos N_I, N_{II} y N_{III} al valor de la propiedad N en los sistemas I, II y III, respectivamente, entonces, el valor de la propiedad N dentro de V en t es:

$$N(t) = N_{II}(t) + N_{III}(t) \tag{4.14}$$

mientras que el valor de N dentro de V para el tiempo $t + \Delta t$ queda determinado por:

$$N(t + \Delta t) = N_{II}(t + \Delta t) + N_I(t + \Delta t) \tag{4.15}$$

Entonces, la tasa de cambio de la propiedad N en V está dado por:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \tag{4.16}$$

tal que

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\underbrace{\frac{N_{II}(t+\Delta t) - N_{II}(t)}{\Delta t}}_{A} + \underbrace{\frac{N_I(t+\Delta)}{\Delta t}}_{B} - \underbrace{\frac{N_{III}(t)}{\Delta t}}_{C} \right) \tag{4.17}$$

En la ecuación anterior, el término A corresponde a cambios en el valor de la propiedad N dentro del volumen de control, debido a procesos que pueden ocurrir dentro de él, o bien a intercambios con el medio que no involucren movimiento del fluido. Por ejemplo, este término puede representar fuentes puntuales de calor o el consumo de oxígeno por la combustión de un gas, o bien intercambios por conducción o difusión entre el volumen de control V y el medio externo. Denominemos R a este término, el cual puede ser nulo o no dependiendo de los procesos que ocurran en el sistema. Por otro lado, el término B en (4.17) corresponde a la tasa de entrada de N a V, mientras que C corresponde a la tasa de salida de N de V. En otras palabras, si R es igual a 0, obtenemos que la tasa de cambio parcial de N en V es igual a lo que entra de N a V menos lo que sale de N de V.

Como las tasas neta de entrada y salida las definimos en términos de sistemas materiales, podemos decir que la tasa a la cual se produce este ingreso o salida se debe a la velocidad del flujo que advecta estos sistemas materiales I y III. Dado esto, diremos que V está limitado por dos superficies, $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$, tal que la superficie 1 es aquella por donde entran partículas a V y la 2 es aquella por donde salen partículas de V (ver **Figura 4.10**). Si tomamos elementos de superficies $d\vec{S}_1$ y $d\vec{S}_2$, vemos que la tasa, en módulo, a la cual son atravesadas por partículas de fluido queda determinada por $|\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1| = v_{n1}\, dS_1$ y $|\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2| = v_{n2}\, dS_2$[1], respectivamente, donde v_{n1} y v_{n2} son las componentes normales de la velocidad, de manera tal que la tasa a la cual la masa de fluido atraviesa estos elementos de superficie es: $\rho_1\, v_{n1}\, dS_1$ y $\rho_2\, v_{n2}\, dS_2$, donde ρ_1 y ρ_2 son las densidades del fluido en las secciones 1 y 2, respectivamente.

Luego, podemos calcular la tasa neta de salida de N de V como:

$$\int_{S_2} \eta_2\, \rho_2\, v_{n2}\, dS_2 - \int_{S_1} \eta_1\, \rho_1\, v_{n1}\, dS_1 \tag{4.18}$$

En este análisis hemos considerado implícitamente el signo que tiene la componente normal de las velocidades, v_{n1} y v_{n2}. Sin embargo, podemos generalizar el análisis notando que una sección de entrada al volumen de control, S_1, siempre define un producto punto negativo entre la velocidad y la normal a la superficie: $\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \vec{v}_1 \cdot \hat{n}_1\, dS_1 < 0$, en tanto que en una sección de salida al volumen de control, S_2, el producto punto entre la velocidad y la normal a la superficie es siempre positivo: $\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \vec{v}_2 \cdot \hat{n}_2\, dS_2 > 0$, donde $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ son los vectores unitarios normales a los elementos de superficie, dS_1 y dS_2, respectivamente. Así, el resultado (4.18) puede expresarse en forma más general como:

[1]Es necesario considerar el producto punto porque si consideramos una superficie que es perpendicular al flujo, ninguna partícula la cruza

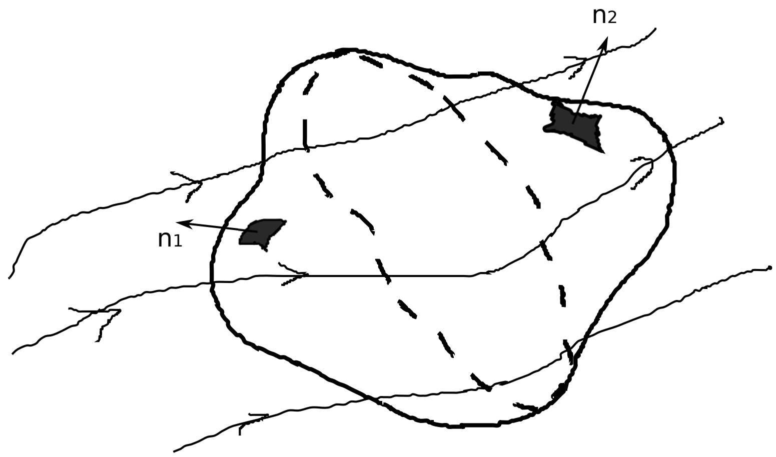


Figura 4.10: Definición de superficies de entrada y salida del volumen de control.

$$\int_{S_2} \eta_2\, \rho_2\, \vec{v}_2 \cdot \hat{n}_2\, dS_2 + \int_{S_1} \eta_1\, \rho_1\, \vec{v}_1 \cdot \hat{n}_1\, dS_1 = \int_S \eta\, \rho\, \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS \tag{4.19}$$

Reemplazando este resultado en (4.18) obtenemos:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = R - \int_S \eta\, \rho\, \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS \tag{4.20}$$

o bien, expresando N en términos de su respectiva propiedad intensiva η:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \eta\rho\, dV \tag{4.21}$$

llegamos finalmente a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \eta\rho\, dV + \int_S \eta\, \rho\, \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = R \tag{4.22}$$

que es conocido como el Teorema del Transporte de Reynolds, que da cuenta del cambio total de N en el volumen de control V, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \eta\rho\, dV + \int_S \eta\, \rho\, \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = R \tag{4.23}$$

4.4 Principio de conservación de la materia

Estudiemos el caso particular de $\eta = 1$, tal que

$$N = \int_V \rho\, \eta\, dV = \int_V \rho\, dV \tag{4.24}$$

es decir, N corresponde a la masa, m, del fluido en V.

Considerando la ley de conservación de la masa, suponiendo que ésta no experimenta transformaciones dentro del volumen de control, entonces $R = 0$ y por lo tanto, aplicando el teorema de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV + \int_S \rho\, \vec{v}\cdot\hat{n}\, dS = 0 \tag{4.25}$$

o bien

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\int_S \rho\, \vec{v}\cdot\hat{n}\, dS \tag{4.26}$$

que en palabras nos dice que la tasa a la cual cambia la masa dentro del volumen de control V (lado izquierdo de (4.26)) es igual a la tasa neta de entrada de masa del volumen de control V (lado derecho de (4.26)), es decir, que la masa que entra menos la masa que sale, por unidad de tiempo, es la tasa a la que la masa queda retenida en V.

Consideremos ahora como volumen de control el tubo de flujo de la **Figura 4.11**, y apliquemos el teorema del transporte de Reynolds. Sabemos por definición que la superficie S_3 es perpendicular al flujo y, por lo tanto, a través de ella no pasa flujo. O sea, nos debemos centrar solamente en las superficies S_1 y S_2, así:

$$\int_S \rho\, \vec{v}\cdot\hat{n}\, dS = \int_{S_2} \rho\, \vec{v}\cdot\hat{n}\, dS + \int_{S_1} \rho\, \vec{v}\cdot\hat{n}\, dS \tag{4.27}$$

Luego, dado que $\vec{v}\cdot\hat{n}$ en S_1 es $-\vec{v}_1\cdot\hat{n}_1$ y que $\vec{v}\cdot\hat{n}$ en S_2 es $+\vec{v}_2\cdot\hat{n}_2$, entonces:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \int_{S_1} \rho\, \vec{v}_1\cdot\hat{n}_1\, dS_1 - \int_{S_2} \rho\, \vec{v}_2\cdot\hat{n}_2\, dS_2 \tag{4.28}$$

Definamos como gasto o caudal másico, G, a las integrales anteriores, tal que:

$$G_2 = \int_{S_2} \rho\, \vec{v}_2\cdot\hat{n}_2\, dS_2 \ \ , \ \ G_1 = \int_{S_1} \rho\, \vec{v}_1\cdot\hat{n}_1\, dS_1 \tag{4.29}$$

que nos indican la cantidad de masa, por unidad de tiempo, que atraviesa las superficies S_1 y S_2, respectivamente. Esta variable G tiene unidades de $[M][T]^{-1}$.

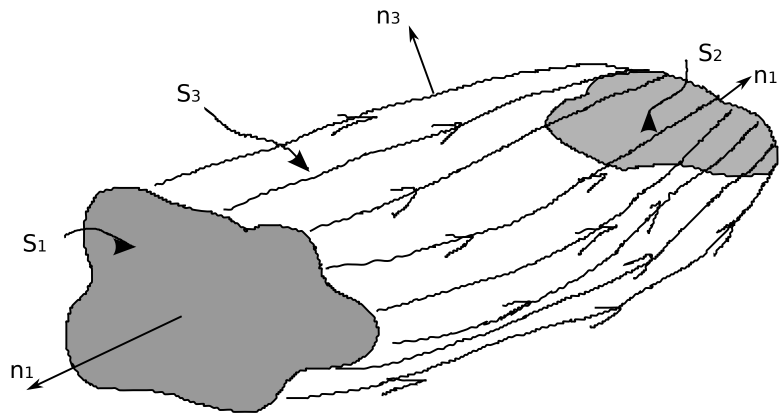


Figura 4.11: Definición de volumen de control a partir de tubo de flujo.

De (4.28) se concluye que para el caso particular de flujo permanente ($\frac{\partial m}{\partial t} = 0$) se cumple que $G_1 = G_2$. Es decir, el gasto másico se mantiene constante a lo largo del tubo de flujo.

Por otro lado, si consideramos el caso de un flujo de un fluido incompresible, tal que ρ es constante, de (4.28) se deduce que:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\int_S \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = Q_1 - Q_2 \tag{4.30}$$

donde Q se denomina gasto o caudal volumétrico (usualmente simplemente caudal), de unidades $[L]^3[T]^{-1}$, y que se define como:

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS \tag{4.31}$$

Finalmente, si reconocemos que $\vec{v} \cdot \hat{n} = v_\perp$ no es más que la velocidad perpendicular a la superficie, entonces si S es una superficie plana obtenemos que:

$$Q = v_\perp\, S \tag{4.32}$$

y

$$G = \rho\, v_\perp\, S \tag{4.33}$$

4.5 Relación velocidad/carga

Dependiendo de las condiciones del flujo, existen varios tipos de relaciones que permiten ligar la velocidad del escurrimiento con la denominada *carga hidráulica* que genera el movimiento

del flujo. Consideremos tres casos básicos: flujo en orificio, flujo en medios permeables y flujo en vertedero (ver **Figura 4.12**). Para cada uno se propone resolver cómo varía la altura en el estanque en función del tiempo ($h(t)$), considerando que la superficie basal del estanque es Ω, que al estanque entra un caudal constante Q_o y que en $t = 0$, se cumple que $h = 0$.

- Caso 1: Fujo en orificio. Se cumple que la velocidad de salida (v) es igual a:

$$v = \sqrt{2g\,h} \tag{4.34}$$

  En primera aproximación, es fácil ver que el principio físico que regula esta relación es el de igualdad de energía cinética y potencial, donde la energía cinética específica (por unidad de masa) la expresamos como $v^2/2$, y la energía potencial específica como gh.

- Caso 2: Flujo en un medio permeable para el que se cumple la Ley de Darcy:

$$v = -K\,\frac{\partial h_p}{\partial x} \tag{4.35}$$

  donde K es el coeficiente de permeabilidad, y h_p es la *carga hidráulica*, que para el caso 2 no es más que altura de líquido dentro del medio permeable. El principio básico que explica la ley de Darcy es el balance de fuerzas entre el gradiente de presiones que general el movimiento, y la fricción viscosa global dentro del medio permeable, la que es proporcional a v cuando el fluido se mueve en régimen laminar.

  Si bien la ecuación de volumen también es válida dentro del medio permeable, considere que su espesor, e, es lo suficientemente pequeño tal que el caudal es impermanente, pero uniforme.

- Caso 3: Vertedero. De modo similar que para el caso del orificio, la velocidad de salida en este caso está dada por:

$$v = C\,\sqrt{2g\,(h - H)} \tag{4.36}$$

  donde $h - H$ es la carga hidráulica sobre el vertedero y C es un coeficiente que por simplicidad en su análisis considérelo igual a la unidad.

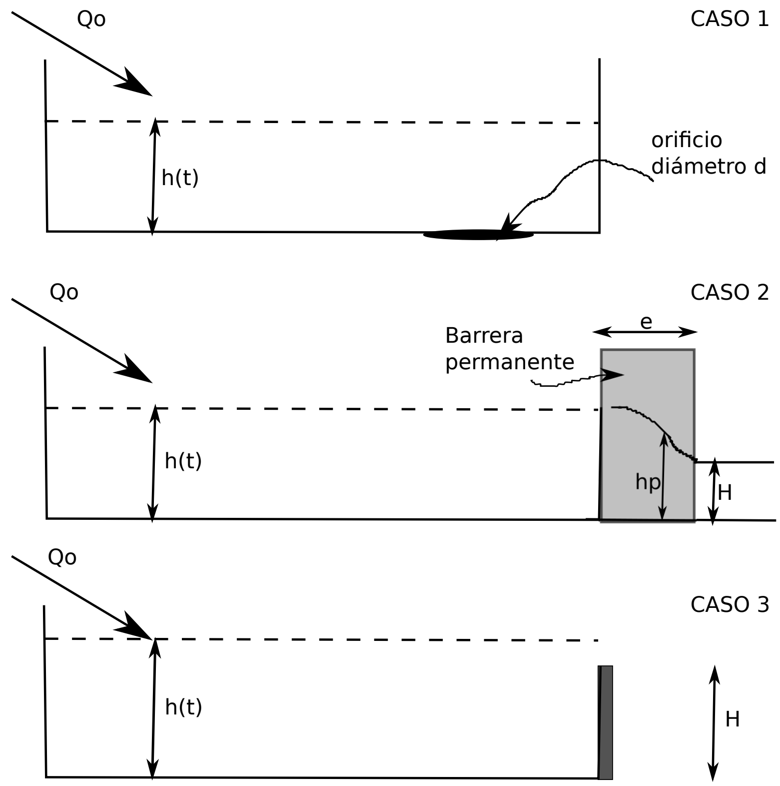


Figura 4.12: Definición de ejercicios propustos.